

CONDUÇÃO DE CALOR BIDIMENSIONAL COM CONDUTIVIDADE TÉRMICA DEPENDENTE DA TEMPERATURA

Cláudia Regina de Andrade – PQ - claudia@mec.ita.br
Edson Luiz Zaporoli – PQ - zaporoli@mec.ita.br

Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Departamento de Energia – IEME
Pça Marechal Eduardo Gomes, 50 - 12228-900
São José dos Campos, SP, Brasil

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar, de forma didática, uma comparação das metodologias de solução analítica e computacional para o ensino de condução de calor em uma geometria bidimensional simples. Analisa-se o efeito da condutividade térmica variável com a temperatura e a influência do número de Biot no sentido de reforçar a necessidade da interpretação qualitativa dos resultados obtidos.

ABSTRACT

This work presents a didactic comparison of the analytical and numerical solution processes to the fin two-dimensional conduction heat transfer problem. The temperature-dependence thermal conductivity was analyzed with the numerical solution while the linear constant properties was solved by the Separation of Variables method. The Biot number and the thermal conductivity variation influences were studied in the final results qualitative interpretation to improve the insight in the physical problems and increase the student capability to solve more complex heat conduction problems.

1. INTRODUÇÃO

O ensino dos métodos de solução para o problema de condução de calor bidimensional têm sido abordado em uma série de livros. Arpaci [1] apresenta a seqüência de formulação de problemas de condução de calor e procedimentos de solução. Ozisik [2] apresenta uma extensa exposição sobre as técnicas analíticas como o método de separação de variáveis, método da superposição, método da função de Green, método da transformada de Laplace, método da transformada integral, métodos analíticos aproximados e método de diferenças finitas. Mikhailov e Ozisik [3] apresentam uma nova abordagem do método de transformada integral aplicada a uma série de classes de problemas de transferência de calor e massa. Myers [4] apresenta de uma forma didática métodos analíticos (separação de variáveis, superposição, transformada de Laplace) e numéricos (diferenças finitas e elementos finitos). Patankar [5] descreve a aplicação do método de volumes finitos em problemas de condução, convecção e difusão. Huang e Usmani [6] apresentam, didaticamente, a seqüência dos elementos conceituais relacionados com a aplicação do método de elementos finitos em condução de calor, mudança de fase e convecção. Neste trabalho será analisado o problema de condução de calor bidimensional em uma barra retangular (aleta), em regime permanente, sem geração interna. Para a solução analítica será utilizada a técnica de separação de variáveis e na solução numérica o método de diferenças finitas. Os métodos de solução (analíticos e numéricos) não serão descritos detalhadamente, pois o objetivo principal é ilustrar as características gerais das duas técnicas enfatizando os resultados obtidos.

2. SOLUÇÃO ANALÍTICA: MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

O problema de condução de calor (Fig. 1), em regime permanente, sem geração interna, fica modelado matematicamente de acordo com a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= 0; \quad 0 \leq y \leq b \Rightarrow T(0, y) = T_w; \\ 0 \leq y \leq b \Rightarrow -k \frac{\partial T(a, y)}{\partial x} &= h [T(a, y) - T_\infty]; \quad 0 \leq x \leq a \Rightarrow k \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = 0; \\ 0 \leq x \leq a \Rightarrow -k \frac{\partial T(x, b)}{\partial y} &= h [T(x, b) - T_\infty] \end{aligned} \quad (1)$$

onde T é o campo de temperatura; k indica a condutividade térmica; x e y constituem o sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. A Eq. (1) representa a aplicação da Primeira Lei da Termodinâmica (conservação da energia) juntamente com a Lei de Fourier:

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T \quad (2)$$

onde \vec{q} é o vetor fluxo de calor e $\vec{\nabla} T$ é o gradiente da temperatura.

Se a condutividade térmica (k) for uma propriedade constante, tem-se a equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

Devido à simetria no perfil de temperatura na posição $y = 0$, a solução será obtida para a metade superior do domínio podendo ser estendida para a metade inferior. O método de Separação de Variáveis se aplica diretamente à solução de um problema simulado por uma equação diferencial parcial e com condições de contorno lineares e homogêneas, com exceção de uma condição de contorno que é linear e não-homogênea.

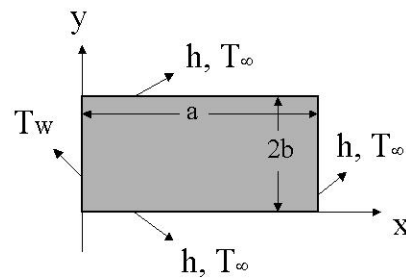


Fig.1. Representação esquemática da geometria do problema.

Para a solução da Eq.(3) e condições de contorno, faz-se a mudança de variável $\theta(x, y) = T(x, y) - T_\infty$ que torna o problema solúvel por Separação de Variáveis, de modo que a Eq.(3) e condições de contorno ficam expressas como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} &= 0; \quad 0 \leq y \leq b \Rightarrow \theta(0, y) = \theta_w = T_w - T_\infty; \quad 0 \leq y \leq b \Rightarrow -k \frac{\partial \theta(a, y)}{\partial x} = h \theta(a, y); \\ 0 \leq x \leq a \Rightarrow k \frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} &= 0; \quad 0 \leq x \leq a \Rightarrow -k \frac{\partial \theta(x, b)}{\partial y} = h \theta(x, b) \end{aligned} \quad (4)$$

De acordo com o método de Separação de Variáveis, a distribuição de temperatura na aleta será determinada como um produto de duas funções, onde cada uma delas depende de “ x ” e “ y ”, isoladamente, na forma:

$$\theta(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (5)$$

Substituindo a Eq. (5) na Eq. (4) e separando as variáveis tem-se:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = +\lambda^2 \quad (6)$$

Como cada termo da Eq. (6) é função de uma única variável independente, os dois membros serão iguais se e somente se eles forem igualados à uma mesma constante arbitrária, por exemplo, λ^2 . Isto permite reescrever a equação diferencial parcial original (Eq. (3)) como duas equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \lambda^2 X(x) = 0 \text{ e } \frac{d^2Y}{dy^2} + \lambda^2 Y(y) = 0 \quad (7)$$

com as condições de contorno lineares e homogêneas separadas como:

$$-k \frac{\partial X(a)}{\partial x} = hX(a); \quad k \frac{\partial Y(0)}{\partial y} = 0 \text{ e } -k \frac{\partial Y(b)}{\partial y} = hY(b)$$

enquanto a condição não-homogênea não pode ser separada, resultando: $\theta(0,y) = \theta_w = T_w - T_\infty$

As Eqs. (7) possui soluções na forma de combinação linear de senos e cossenos (para a direção y) e exponenciais (direção x). Substituindo as soluções das Eq. (7) na Eq. (5), resulta:

$$\theta(x,y) = [A \text{ sen}(\lambda y) + B \text{ cos}(\lambda y)] \cdot [C \text{ exp}(\lambda x) + D \text{ exp}(-\lambda x)] \quad (8)$$

Determinando as constantes com as condições de contorno homogêneas e desenvolvendo em série de Fourier a condição de contorno não-homogênea, resulta na seguinte solução:

$$\frac{\theta(x,y)}{\theta_w} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ N_n \frac{\text{sen}(\lambda_n b)}{\lambda_n (1 + F_n)} [\text{exp}(\lambda_n x) + F_n \text{ exp}(-\lambda_n x)] \cdot \text{cos}(\lambda_n y) \right\} \quad (9)$$

onde $F_n = \frac{[h \text{ exp}(\lambda_n a) + k \lambda_n \text{ exp}(\lambda_n a)]}{[k \lambda_n \text{ exp}(-\lambda_n a) - h \text{ exp}(-\lambda_n a)]}$; $N_n = \frac{2[(\lambda_n)^2 + (h/k)^2]}{a[(\lambda_n)^2 + (h/k)^2] + (h/k)}$ e os autovalores λ_n são obtidos como solução da equação transcendental: $\lambda_n \text{tg}(\lambda_n a) = h/k$.

A solução indicada na Eq. (9) está numa linguagem simbólica, onde a temperatura está representada na forma de um somatório de funções seno e exponenciais. Os resultados derivados desta solução ainda podem ser obtidos na forma simbólica, como por exemplo, o fluxo de calor na face em $x = 0$. Esta grandeza é calculada como:

$$Q_x(0,y) = 2 \int_0^b -k \frac{\partial \theta}{\partial x}(0,y) dy = -2k\theta_w \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ N_n \frac{\text{sen}^2(\lambda_n b)(1 - F_n)}{\lambda_n (1 + F_n)} \right\} \quad (10)$$

Somente quando se deseja obter os valores numéricos do fluxo de calor é que são calculados os valores de seno, e exponenciais da série. A precisão desejada tanto na Eq. (9) como na Eq. (10) depende do número de termos da série (truncamento).

3. SOLUÇÃO NUMÉRICA

A idéia básica de qualquer método numérico consiste em transformar um domínio contínuo em um problema discreto com um número finito de pontos nodais, Fig. (2), e a solução é obtida resolvendo um sistema de equações algébricas. No método de diferenças finitas, a discretização é feita aproximando as derivadas das grandezas envolvidas por quocientes de diferenças dessas variáveis.

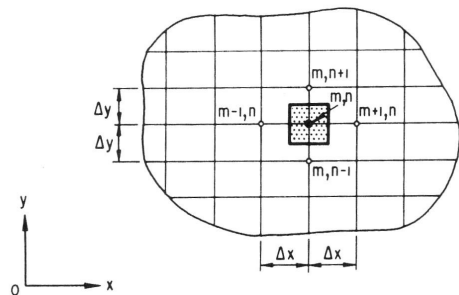


Figura 2. Notação para a malha computacional utilizada na aproximação por diferenças finitas.

Como o método numérico não possui restrições de linearidade (como ocorre no método de Separação de Variáveis), no problema a ser resolvido numericamente, considera-se a condutividade térmica como função da temperatura, segundo a equação:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0 \quad (11)$$

onde $k(T)$ é uma função que indica a variação da condutividade térmica com a temperatura.

Para obter o primeiro termo da Eq. (11) calcula-se a derivada de primeira ordem na direção x , aproximada por meio de diferenças finitas centradas em dois pontos, resultando:

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{(m-1/2),n} \cong k_{(m-1/2),n} \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{(\Delta x)} \quad \text{e} \quad k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{(m+1/2),n} \cong k_{(m+1/2),n} \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{(\Delta x)} \quad (12)$$

Utilizando os resultados da Eq. (12), tem-se:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{m,n} \cong \frac{k_{(m-1/2),n} T_{m-1,n} - [k_{(m+1/2),n} + k_{(m-1/2),n}] \cdot T_{m,n} + k_{(m+1/2),n} T_{m+1,n}}{(\Delta x)^2} \quad (13a)$$

De forma análoga obtém-se para a direção y :

$$\frac{\partial T}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Big|_{m,n} \cong \frac{k_{m,(n-1/2)} T_{m,n-1} - [k_{m,(n+1/2)} + k_{m,(n-1/2)}] \cdot T_{m,n} + k_{m,(n+1/2)} T_{m,n+1}}{(\Delta y)^2} \quad (13b)$$

onde $\Delta x = x_m - x_{m-1}$ e $\Delta y = y_n - y_{n-1}$.

Deste modo, a Eq. (11) pode ser aproximada como:

$$\frac{k_{(m-1/2),n} T_{m-1,n} - [k_{(m+1/2),n} + k_{(m-1/2),n}] \cdot T_{m,n} + k_{(m+1/2),n} T_{m+1,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{k_{m,(n-1/2)} T_{m,n-1} - [k_{m,(n+1/2)} + k_{m,(n-1/2)}] \cdot T_{m,n} + k_{m,(n+1/2)} T_{m,n+1}}{(\Delta y)^2} = 0 \quad (14)$$

Se tomarmos os mesmos intervalos Δx e Δy , a Eq. (14) fornece uma linha de um sistema de equações algébricas na forma:

$$k_{(m-1/2),n} T_{m-1,n} + k_{m,(n-1/2)} T_{m,n-1} - [k_{(m+1/2),n} + k_{(m-1/2),n} + k_{m,(n+1/2)} + k_{m,(n-1/2)}] \cdot T_{m,n} + k_{(m+1/2),n} T_{m+1,n} + k_{m,(n+1/2)} T_{m,n+1} = 0 \quad (15)$$

onde a temperatura em cada nó $N(m,n)$ fica expressa em termos dos vizinhos $(m+1,n)$, $(m-1,n)$, $(m,n+1)$, $(m,n-1)$. O sistema de equações algébricas não lineares resultante da aplicação da Eq. (15), para todos os pontos internos da malha sobre o domínio e das equações resultantes da discretização das condições de contorno, pode ser resolvido por um processo iterativo que envolve dois níveis. No nível externo o sistema de equações é linearizado calculando-se as condutividades térmicas com as temperaturas obtidas em uma iteração anterior. No nível interno o sistema de equações algébricas linearizado é resolvido por um método direto ou iterativo. O sistema algébrico resultante será constituído por N equações simultâneas, cuja solução pode ser obtida por algoritmos diretos (inversão de matriz, eliminação de Gauss) ou por meio de esquemas iterativos (Axelson, [8]).

4. RESULTADOS

Na solução numérica do problema de condução bidimensional em um domínio retangular (aleta), considerou-se a influência da variação da condutividade térmica na distribuição de temperatura (Eq. (11)). Foram utilizados dados para a liga de alumínio 2024-T6 fornecidos por Incropera e DeWitt [7], conforme apresentado na Fig. 3, e adotou-se uma variação exponencial para ajustar esses dados de modo que:

$$k(T) = A + B \exp(-CT) \text{ [W/mK]} \quad (16)$$

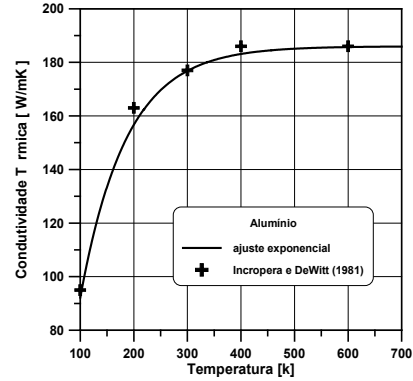


Figura 3. Variação da condutividade térmica com a temperatura para a liga de alumínio 2024-T6.

O primeiro efeito a ser analisado se refere à influência do número de Biot na solução. O número de Biot (Bi) é definido como $Bi = \frac{hL}{k_m}$, onde L é a dimensão característica na direção normal à face; h é o coeficiente de convecção e k_m é a condutividade térmica da liga de alumínio avaliada na média aritmética das temperaturas na base da aleta (T_w) e do fluido (T_∞).

A temperatura na linha de centro ($y = 0$) ao longo da extensão da aleta é indicada na Fig. (4). Para $Bi = 1.000$, a temperatura na ponta da aleta é praticamente igual a temperatura do fluido (250 K). Com a redução do número de Biot, a temperatura na extremidade da aleta se eleva. Se o campo de temperatura (T) fosse somente função da coordenada x, as isotérmicas seriam segmentos de retas verticais. O perfil de temperatura apresentado na Fig. (4), para $Bi = 0,01$ é o que mais se aproxima dessas características. No estudo tradicional da transferência de calor com aletas, supõe-se que a distribuição de temperatura com seja unidimensional. Com esta hipótese, e assumindo condutividade térmica constante, o balanço de energia na aleta fica representado por:

$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} - m^2 [T(x) - T_\infty] = 0, \quad m = \sqrt{\frac{hP}{kA}} \quad (17)$$

onde A é a área e P é o perímetro da seção transversal da aleta (normal ao fluxo de calor por condução), respectivamente. Para as condições de contorno de temperatura especificada na base e troca de calor por convecção na extremidade, o perfil de temperatura pode ser calculado por:

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \frac{\cosh[m(a-x)] + (h/mk)\sinh[m(a-x)]}{\cosh(ma) + (h/mk)\sinh(ma)} \quad (18)$$

Comparando-se os resultados da Eq. (18) com as soluções bidimensionais verifica-se uma grande concordância para o caso em que $Bi = 0,01$. A distribuição de temperatura ao longo da fronteira (A-B-C-D-A) do domínio é apresentada na Fig. (5). Nota-se que as condições de contorno de convecção associadas com a Eq. (3) se reduzem à condição de contorno de temperatura especificada em cada face da fronteira quando o número de Biot é grande, ou seja, nas faces AB, BC e CD a temperatura é aproximadamente igual a T_∞ . Na posição $x = 0$ ver Fig. (1), o fluxo de calor médio (q_{med}) foi calculado de acordo com a expressão:

$$q_{med} = \frac{1}{2b} \left(\int_0^{2b} -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} dy \right) \quad (20)$$

onde q_{med} é a média na vertical do fluxo de calor que atravessa a fronteira da placa na posição $x = 0$. A Tab. (2) apresenta uma comparação entre os valores de q_{base} obtidos com condutividade térmica constante e condutividade variável com a temperatura.

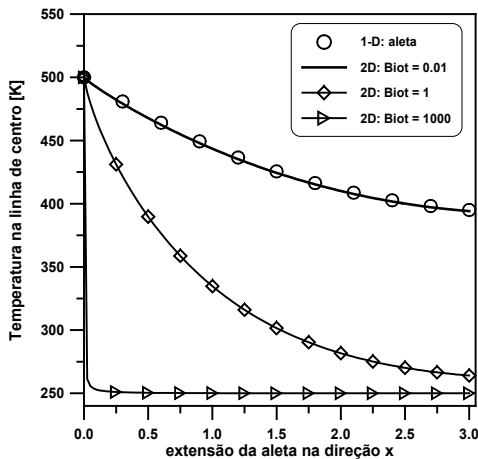


Figura 4. Perfis de temperatura na linha de centro da aleta.

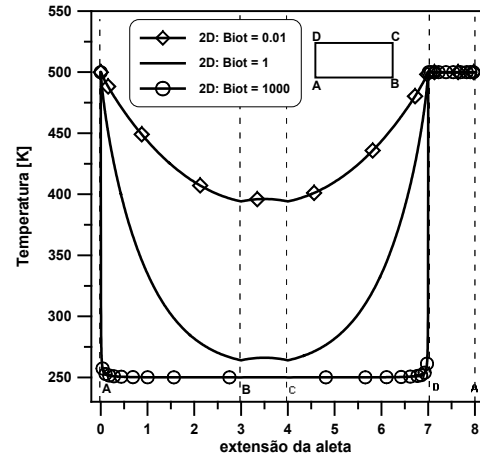


Figura 5. Perfis de temperatura ao longo da fronteira da aleta.

Tabela 2. Fluxo de calor médio [W/m^2] na base da aleta para $\text{Bi} \rightarrow \infty$

	$T_w - T_\infty = 50 \text{ K}$	$T_w - T_\infty = 250 \text{ K}$	$T_w - T_\infty = 500 \text{ K}$
k constante	$q_{\text{med}} = 5,7e4$	$q_{\text{med}} = 2,8e5$	$q_{\text{med}} = 5,8e5$
k variável	$q_{\text{med}} = 6,8e4$	$q_{\text{med}} = 3,4e5$	$q_{\text{med}} = 7,2e5$
Diferença	19 %	21 %	24 %

Verifica-se que, como esperado, o fluxo de calor é mais intenso à medida que o potencial aumenta, ou seja, quando a diferença $T_w - T_\infty$ cresce. Nota-se também que o resultado obtido para o fluxo de calor, considerando a condutividade térmica variável, é cerca de 20 % maior para os casos apresentados na Tab. (2).

5. CONCLUSÕES

Com o objetivo didático, neste trabalho analisou-se o problema de condução de calor bidimensional em uma barra retangular (aleta) com a apresentação do processo de solução por meio de duas metodologias: analítica (simbólica) e numérica (diferenças finitas). Em seguida, analisaram-se as características da solução obtida variando-se o número de Biot e o efeito da condutividade térmica variável com a temperatura. O propósito deste trabalho foi fornecer ao aluno uma comparação entre os métodos de solução e reforçar a necessidade da interpretação dos resultados obtidos. Mostrou-se, por exemplo, que para número de Biot elevado, as condições de contorno de convecção podem ser simplificadas para a condição de contorno de temperatura especificada (Fig. (5)). Por outro lado, para um número de Biot pequeno, a distribuição de temperatura torna-se aproximadamente uma função somente de x , onde pode ser aplicada a solução unidimensional.

REFERÊNCIAS

1. Arpaci, V.S., “*Conduction Heat Transfer*”, Addison-Wesley Publishing Corporation, USA, **1966**.
2. Ozisik, M.N., “*Heat Conduction*”, JohnWiley & Sons, New York, USA., **1980**.
3. Mikhailov, M.D. and Ozisik, M.N., “*Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*”, JohnWiley & Sons, USA, **1984**.
4. Myers, G.E., “*Analytical Methods in Conduction Heat Transfer*”, McGraw-Hill, USA. **1971**.
5. Patankar, S.V., “*Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*”, Hemisphere Publishing Corporation, USA, **1980**.
6. Huang, H.C. e Usmani, A.S., “*Finite Element Analysis for Heat Transfer*”, Springer-Verlag, London, **1994**.
7. Incropera, F.I. e DeWitt, D.P. “*Fundamentals of Heat Transfer*”, John Wiley & Sons, USA, **1981**.
8. Axelson, O., “*Iterative Solution Methods*”, Cambridge University Press, **1996**.