

# CONSIDERAÇÕES SOBRE MÉTODOS DE DECISÃO MULTICRITÉRIO

**Roterdan Moura da Silva, Mischel Carmen Neyra Belderrain, IC**

Instituto Tecnológico de Aeronáutica / Divisão de Engenharia Mecânica-Aeronáutica,  
roterdan05@hotmail.com; carmen@ita.br

**Resumo** – Em problemas de decisão complexos, geralmente, vários critérios podem ser necessários para uma escolha final entre diferentes alternativas. A Análise de Decisão Multicritério padroniza o processo de tomada de decisão através de modelagem matemática, auxiliando o decisor a resolver problemas nos quais existem diversos objetivos a serem alcançados simultaneamente. Dentre os métodos desenvolvidos no ambiente das Decisões Multicritério, merece destaque o Método de Análise Hierárquica (AHP – Analytic Hierarchy Process), que é baseado na divisão do problema de decisão em níveis hierárquicos para melhor compreensão e avaliação. Contudo, o AHP Clássico apresenta o problema de inversão de ordem. Logo, foram desenvolvidas variações do AHP Clássico, como o AHP Multiplicativo, Referenciado e B-G, com o objetivo de resolver esse problema.

**Abstract** – In complex decision problems, in general, many criteria can be necessary to have a final choice among different alternatives. The Multicriteria Decision Analysis standardizes the decision making process through mathematical modeling, helping the decision maker to solve problems, in which there are several objectives to be achieved simultaneously. Among the methods developed in Multicriteria Decision environment, deserves prominence the Analytic Hierarchy Process – AHP, which is based on decision problem division in hierarchic levels for its better comprehension and evaluation. However, the AHP Classic presents the problem of rank reversal. Hence, there were developed variations of the AHP Classic, such as Multiplicative, Referenced and B-G AHP, with the goal of solving this problem.

## 1. INTRODUÇÃO

Na realidade das empresas, o processo de tomada de decisão é usualmente complexo. A Análise de Decisão Multicritério auxilia o decisor a resolver problemas nos quais vários são os objetivos a serem alcançados de forma simultânea e o processo consiste das seguintes etapas:

1. Definir as alternativas
2. Definir os critérios relevantes para o problema de decisão
3. Avaliar as alternativas em relação aos critérios
4. Avaliar a importância relativa de cada critério
5. Determinar a avaliação global de cada alternativa

Entre os métodos desenvolvidos no ambiente das Decisões Multicritério, o mais conhecido é o Método de Análise Hierárquica (AHP – Analytic Hierarchy Process) desenvolvido por Thomas Saaty. Nesse método, o problema de decisão é dividido em níveis hierárquicos, facilitando, assim, sua compreensão e avaliação.

Na figura 1, temos um exemplo de estruturação dos critérios na formulação do Método AHP. No problema em questão, o objetivo é a compra de um bom carro, sendo que os critérios com o mesmo nível de importância são comparados entre si.



Figura 1 – Hierarquia de critérios para a compra de um carro

## 2. MÉTODO DE ANÁLISE HIERÁRQUICA

### 2.1 Sete Pilares do Método AHP

#### a) Escalas de razão, proporcionalidade e escalas de razão normalizadas

As escalas de razão, proporcionalidade e escalas de razão normalizadas são essenciais para a geração e síntese de prioridades, no AHP ou em qualquer outro método multicritério que necessite integrar medidas de comparação com sua própria escala. Adicionalmente, escalas de razão são a única maneira de generalizar uma teoria de decisão para o caso de dependência e feedback, porque as escalas de razão podem ser somadas e multiplicadas quando elas pertencem a mesma escala.

Quando dois decisores chegam a diferentes escalas de razão para o mesmo problema, deve-se testar a compatibilidade das respostas de ambos e aceitar ou rejeitar a proximidade entre elas. Logo, com as escalas de razão, pode-se associar cada alternativa a um vetor de benefícios, custos, oportunidades e riscos, para a determinação da alternativa ótima para o problema.

#### b) Comparações recíprocas par a par

As comparações par a par são usadas para expressar o grau de preferência de uma alternativa sobre outra em um determinado critério, correlacionando essa preferência em uma escala numérica, da qual o principal autovetor de prioridades é derivado. O autovetor mostra a dominância de cada elemento com respeito ao outro para um dado critério, sendo que um elemento que não está sujeito a um critério recebe o valor zero no autovetor sem incluí-lo em comparações.

O método AHP possui três maneiras de obter a ordem das alternativas

- Relativa: onde cada alternativa é comparada par a par com relação a um dado critério.
- Absoluta: onde as alternativas são classificadas numa escala de intensidade para um determinado critério.
- Benchmarking: onde uma alternativa conhecida é adicionada ao grupo de alternativas e as demais alternativas são comparadas a ela.

#### c) Sensibilidade do principal autovetor direito

A sensibilidade do principal autovetor direito a perturbações em julgamentos limita o número de elementos em cada conjunto de comparações e requer que os elementos sejam homogêneos. O autovetor esquerdo é significativo e recíproco. Devido à escolha da unidade como um dos dois elementos em uma comparação par a par, não é possível obter o principal autovetor esquerdo através de comparações par a par quando o elemento dominante não pode ser decomposto. Como resultado, para perguntar quão menor é um elemento em relação a outro, deve-se tomar o recíproco perguntando quão maior o outro elemento é.

#### d) Homogeneidade e clusterização

São usadas para estender a escala fundamental gradualmente, de cluster a cluster, para aumentá-la de 1-9 até  $1-\infty$ .

#### e) Síntese que pode ser estendida para dependência e feedback

É aplicada para determinar a escala de razão unidimensional, a partir das escalas de razão de cada critério, para representar a avaliação global de cada alternativa. A síntese das escalas na estrutura de decisão pode somente ser feita através da adição ponderada do valor de cada escala.

A multiplicação ponderada do valor das escalas, no qual as prioridades das alternativas são elevadas conforme o peso dos critérios e os resultados são multiplicados, apresenta as seguintes falhas:

- Não ocorre a aplicação do mesmo peso para as mesmas medidas na mesma escala de razão em diversos critérios.
- Assume que a matriz de comparações é sempre consistente, logo sacrificando a idéia de inconsistência e de como lidar com ela.
- Não ocorre a generalização para o caso de interdependência e feedback, tal que o AHP é generalizado para o Método de Análise em Rede (ANP), onde os critérios e as alternativas dependem um do outro.

- Sempre ocorre a preservação de ordem, contradizendo casos onde a reversibilidade de ordem é permitida.

#### f) Preservação e reversibilidade de ordem

A preservação e a reversibilidade de ordem podem ser mostradas sem adicionar ou remover nenhum critério, apenas introduzindo cópias de uma alternativa. Dessa forma nota-se que a reversibilidade de ordem é tão intrínseco à tomada de decisão quanto é a preservação de ordem.

#### g) Decisões em grupo

A decisão de cada membro do grupo deve ser integrada uma por vez, de maneira matemática, podendo ser levados em consideração a experiência, o conhecimento e o poder de cada pessoa dentro do grupo, sem que seja necessário um consenso ou a decisão da maioria.

## 2.2 Método de Análise Hierárquica Clássico

O Método AHP, após a divisão do problema em níveis hierárquicos, determina, por meio da síntese dos valores dos agentes de decisão, uma medida global para cada uma das alternativas, priorizando-as ou classificando-as ao final do método.

Depois de construir a hierarquia, cada decisor deve fazer uma comparação, par a par, de cada elemento em um nível hierárquico dado, criando-se uma matriz de decisão quadrada. Nessa matriz, o decisor representará, a partir de um escala predefinida, sua preferência entre os elementos comparados, sob o enfoque do nível imediatamente superior. Por exemplo, considerando o exemplo da figura 1, temos que os elementos Potência do Motor e Consumo estão no mesmo nível hierárquico. Esses critérios são comparados em relação ao critério imediatamente superior, que corresponde ao critério Desempenho, do ponto de vista do objetivo de maximização desse critério. Assim, o decisor responderá às seguintes perguntas: qual dos dois contribui mais para maximização do critério Desempenho? Quantas vezes um critério contribui mais que outro?

Dessa maneira será gerada uma matriz quadrada recíproca positiva conhecida como Matriz Dominante. Assim a Matriz Dominante é aquela que expressa o número de vezes em que uma alternativa domina ou é dominada pelas demais, onde as alternativas são comparadas par a par.

A comparação par a par das alternativas é utilizada realizando uma escala linear própria, que varia de 1 a 9, a qual é denominada Escala Fundamental de Saaty.

**Tabela 1 – Escala Fundamental de Saaty**

1	Igual importância	As duas atividades contribuem igualmente para o objetivo.
3	Importância pequena de uma sobre outra	A experiência e o julgamento favorecem levemente uma atividade em relação à outra.
5	Importância grande ou essencial	A experiência e o julgamento favorecem fortemente uma atividade em relação à outra.
7	Importância muito grande ou demonstrada	Uma atividade é muito fortemente favorecida em relação à outra, sua dominação de importância é demonstrada na prática.
9	Importância absoluta	A evidência favorece uma atividade em relação à outra com o mais alto grau de certeza.
2, 4, 6, 8	Valores intermediários	Quando se procura uma condição de compromisso entre duas definições.

Os elementos fundamentais do Método AHP são:

- Atributos e propriedades: um conjunto de alternativas é comparado em relação a um conjunto de propriedades (critérios).
- Correlação Binária: quando dois elementos são comparados baseados em uma propriedade, realiza-se uma comparação binária, na qual um elemento é preferível ou indiferente ao outro.
- Escala Fundamental: a cada elemento associa-se um valor de prioridade sobre outros elementos em uma escala numérica.

- Hierarquia: conjunto de elementos ordenados por ordem de preferência e homogêneos em seus respectivos níveis hierárquicos.

O processo utilizado pelo Método AHP pode ser dividido em duas etapas: (a) estruturação hierárquica do problema de decisão e, (b) modelagem do método propriamente dito.

O decisor deve efetuar a estruturação do problema, combinando os critérios segundo os diversos níveis hierárquicos necessários, para que se obtenha uma fiel representação do problema. Dessa forma, determinam-se as alternativas do problema, que serão analisadas em cada critério do nível hierárquico mais baixo.

A estruturação do problema deve ser feita de tal forma que os critérios aplicados em cada nível devem ser homogêneos e não redundantes. Ou seja, os critérios de um determinado nível devem apresentar o mesmo grau de importância relativa dentro do seu nível (homogeneidade), e um critério de um determinado nível deve ser independente em relação aos critérios dos níveis inferiores (não redundância).

Definida a estrutura hierárquica, realiza-se a comparação par a par de cada alternativa dentro de cada critério do nível imediatamente superior, ou seja, para cada critério serão relacionadas as alternativas devidamente aplicadas na Escala Fundamental.

Utilizando a matriz de decisão  $A$ , o Método AHP calcula resultados parciais do conjunto  $A$  dentro de cada critério  $v_i(A_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , denominado valor de impacto da alternativa  $j$  em relação à alternativa  $i$ , em que esses resultados representam valores numéricos das atribuições dadas pelo decisor a cada comparação de alternativas. Os resultados são normalizados pela expressão:

$\sum_{j=1}^n v_i(A_j) = 1$ ,  $j = 1, \dots, n$ ; onde  $n$  corresponde ao número de alternativas ou elementos comparados. Cada parte do somatório consiste em:  $v_i(A_j) = a_{ij} / \sum_{j=1}^n a_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Isso faz com que o vetor de prioridades da alternativa  $i$  em relação ao critério  $C_k$  seja:  $v_k(A_i) = \sum_{j=1}^n v_i(A_j) / n$ ,  $i = 1, \dots, n$

Depois de obtido o vetor de prioridades ou de impacto das alternativas sob cada critério  $C_k$ , continuar-se-á com o nível dos critérios. Nesse caso, adota-se novamente a escala verbal para a classificação par a par dos critérios, que são normalizados pela expressão:

$w_i(C_j) = C_{ij} / \sum_{i=1}^m C_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, m$ ; onde  $m$  é o número de critérios de um mesmo nível.

O vetor prioridade é dado por:  $w_i(C_i) = \sum_{j=1}^m w(C_j) / m$ ,  $i = 1, \dots, m$

Finalmente, os valores finais das alternativas são gerados a partir de um processo de agregação, tal que:  $f(A_j) = \sum_{i=1}^m w(C_i) * v_i(A_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ ; onde  $n$  é o número de alternativas.

Dessa forma, determina-se uma ordenação global das alternativas por intermédio de uma função global de valor.

### 2.3 Críticas ao Método AHP

No método AHP, o decisor expressa sua preferência entre duas alternativas comparando-as de acordo com a escala fundamental. Isso gera uma escala de razão de preferências, conflitando com o princípio da função aditiva, que se adapta melhor a uma escala de intervalos.

Contudo, a maior crítica ao AHP refere-se ao problema de inversão de ordem das alternativas. A formulação do Método AHP Clássico é contrária à inversão de ordem, ou seja, a posição relativa das alternativas obtida segundo a função aditiva  $f(A_j)$  pode ser alterada caso uma alternativa seja adicionada ou removida da análise. A existência de uma alternativa que, ao ser introduzida no problema, ocasiona inversão de ordem mostra que, na fase de modelagem do problema, podem ter ocorrido falhas.

Na verdade, a inversão de ordem não é resultado da introdução de uma nova alternativa, mas sim da introdução da nova alternativa sem adequada reavaliação dos valores atribuídos aos elementos do nível hierárquico superior. Tal fato, em si, pode ocasionar a inversão de ordem das alternativas. Apesar da independência requerida entre os níveis hierárquicos, há uma dependência funcional que o decisor infringirá caso não o considere. Utilizando uma escala absoluta, ao invés da escala fundamental, temos que o problema de inversão de ordem está resolvido, pois a composição final dos pesos permanece equitativa, não ocorrendo tal inversão.

Nesse sentido, são sugeridos três variações do AHP Clássico com o objetivo de resolver o problema de inversão de ordem. A seguir serão apresentados (a) O AHP Multiplicativo, (b) AHP Referenciado e; (c) AHP B-G os quais apresentam a mesma base teórica do AHP Clássico.

### 3. VARIAÇÕES DO MÉTODO DE ANÁLISE HIERÁRQUICA

#### 3.1 Método de Análise Hierárquica Multiplicativo

O Método AHP Multiplicativo, proposto por Lootsma (apud Gomes et al, 2004), é uma variação do Método AHP Clássico, pois utiliza uma escala geométrica ao invés da escala linear proposta por Saaty. A comparação par a par das alternativas sob um determinado critério é feita baseada na escala verbal de preferências, onde  $S_i$  é a preferência da alternativa  $A_i$ . Essa escala é denominada Escala Natural de Lootsma.

**Tabela 2 – Escala Natural de Lootsma**

-8	$S_i$ é amplamente menos desejável que $S_j$
-6	$S_i$ é muito menos desejável que $S_j$
-4	$S_i$ é menos desejável que $S_j$
-2	$S_i$ é pouco menos desejável que $S_j$
0	$S_i$ é indiferente a $S_j$
2	$S_i$ é pouco menos desejável que $S_j$
4	$S_i$ é menos desejável que $S_j$
6	$S_i$ é muito menos desejável que $S_j$
8	$S_i$ é amplamente menos desejável que $S_j$

A preferência expressa em escala verbal é convertida em escala geométrica de valores numéricos  $\gamma_{ij}$ . O primeiro passo do procedimento consiste no uso de uma função que aproxima os valores da escala para alcançar os valores de impacto, tal que:  $\sum_{j=1}^n v_i(A_j) = 1$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $i = 1, \dots, m$ ; onde  $m$  corresponde ao número de critérios e  $n$  o número de alternativas.

O segundo passo sugere que o decisor escolha duas alternativas, de maneira que sua preferência por  $A_i$  sob  $C_k$  seja igual à preferência de  $A_j$  sob  $C_{k+1}$ . Além disso, o decisor deve expressar sua opinião em relação ao conjunto  $C_k A_i$  sobre o conjunto  $C_{k+1} A_j$ . Em seguida, adota-se o mesmo procedimento para obtenção dos valores dos pesos  $w(C_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

O terceiro passo refere-se à agregação dos valores obtidos por uma função multiplicativa, que resulta em uma escala de preferência das alternativas sob os critérios avaliados. Utilizando a agregação por média geométrica, temos:  $f(A_j) = \alpha \prod_{i=1}^m (v_i(A_j))^{C_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ; onde  $m$  é o número de critérios,  $\alpha$  é um fator de normalização que garante que a soma seja igual a 1 e  $C_i$  denota o peso de  $w(C_i)$ .

#### 3.2 Método de Análise Hierárquica Referenciado

O Método AHP Referenciado é uma evolução do modelo original, tendo em vista que a constante de proporcionalidade  $K$  é introduzida na modelagem matemática. A constante  $K$  surgiu da comparação dos valores relativos dos critérios e alternativas. A importância relativa de cada critério deve ser proporcional ao produto de seu fator de escala com a soma dos valores absolutos da alternativa avaliada sob o critério analisado, isto é, seja  $K$  a constante de proporcionalidade e  $q_k$  o fator de escala que converte a medida do atributo  $k$  em unidades do objetivo,  $x_k$  representa o valor referenciado de uma alternativa e é obtido pela expressão:  $x_k = K q_k \sum_k T_{h,k}$ , onde  $T_{h,k}$  é o valor relativo da alternativa avaliada.

Essa constante de proporcionalidade gera uma restrição, que deve ser considerada no cálculo da importância dos critérios, o qual se obtém a partir da expressão:  $W_i = \sum_k x_k w_{i,k}$

Segundo essa fórmula, o valor de cada alternativa é o resultado da soma de seus respectivos valores absolutos.

#### 3.3 Método de Análise Hierárquica B-G

O Método AHP B-G é semelhante ao Método AHP Referenciado, contudo sua formulação matemática evita a ocorrência da inversão de ordem com a introdução de uma nova alternativa. O Método AHP B-G procura, depois que as alternativas são comparadas par a par, a alternativa que apresenta o maior valor de prioridade em relação às demais, objetivando usar esse valor na normalização do vetor de prioridades. Assim, o maior valor será levado à unidade e os demais, a valores proporcionais.

Diferente do Método AHP Referenciado, o valor referenciado de uma alternativa pelo Método AHP B-G é obtido a partir da expressão:  $\pi_k = K q_k T_k^*$  onde  $T_k^*$  corresponde ao valor da prioridade da alternativa com maior valor.

### 3.4 Comparação entre os Métodos de Análise Hierárquica

Os três últimos Métodos de Análise Hierárquica (Multiplicativo, Referenciado e B-G) são considerados variações do Método AHP Clássico, por possuir a mesma base teórica, porém incorporam possíveis soluções para controvérsias existentes no Método Clássico.

O Método Multiplicativo foi proposto por Lootsma para superar os seguintes pontos críticos do Método Clássico:

- A Escala Fundamental proposta por Saaty para quantificar os juízos humanos.
- O uso do autovetor para o cálculo dos valores de impacto das alternativas.
- Os valores finais calculados por uma regra de média aritmética de agregação.

De acordo com o Método Multiplicativo, a comparação par a par das alternativas deveria ser baseada numa regra geométrica, e não aritmética, como ocorre no Método Clássico. Logo, a Escala Natural de Lootsma possui um espectro mais amplo que a Escala Fundamental de Saaty, já que a última não é uma escala geométrica, e, portanto, os valores recíprocos propostos por Saaty podem introduzir uma inconsistência que não está presente na mente do decisor. Além disso, no limite, a Escala Fundamental representa uma superioridade absoluta, o que não corresponde à realidade. A Escala Natural é mais consistente que a Escala Fundamental, porque não permite a ocorrência dos desvios mencionados. Por fim, a Escala Natural possui uma natureza multiplicativa, apresentando uma tendência natural para evitar a inversão de ordem.

O Método Referenciado surgiu a partir das controvérsias relacionadas aos valores dos critérios e das alternativas. Nesse método, é introduzida a constante de proporcionalidade  $K$ , que surgiu da comparação dos valores relativos de critérios e das alternativas. Essa constante de proporcionalidade gera uma restrição, utilizada no cálculo da importância dos critérios, onde o valor de cada alternativa é o resultado da soma seus respectivos valores absolutos.

O Método B-G é bastante similar ao Método Referenciado. Contudo, o mesmo sugere que a alternativa com o maior valor de prioridade em relação às demais deve ser utilizada na normalização do vetor de prioridades.

Observa-se que todos os Métodos de Análise Hierárquica, embora com peculiaridades que visam resolver possíveis inconsistências, são baseados no Método Clássico. Logo, mesmo havendo diferenças em escalas utilizadas ou modelagem matemática entre os Métodos AHP, na maioria dos problemas decisórios, os resultados encontrados para a ordenação das melhores alternativas serão os mesmos.

## 4. CONCLUSÃO

Em processos de decisão complexos, onde existem vários critérios a serem observados para uma escolha final entre diversas alternativas, o Método de Análise Hierárquica é bastante útil na estruturação do problema e modelagem matemática. A sua abordagem de divisão de critérios em hierarquias e correlação de alternativas com critérios, permite uma fácil compreensão e melhor avaliação do problema.

Contudo a modelagem matemática do AHP Clássico apresenta, em alguns casos, problemas para determinação mais adequada da ordem das alternativas, podendo causar possíveis inversões de ordem. As variações do AHP Clássico (AHP Multiplicativo, Referenciado e B-G) visam resolver os problemas decorrentes dessa modelagem imprecisa.

Por fim, temos que, embora os critérios e alternativas são considerados independentes no método AHP, existem problemas no qual a dependência e o feedback entre eles devem ser considerados. Para esses problemas, existe o método ANP, o qual é uma generalização do método AHP, pois considera as possíveis interdependências entre os critérios e alternativas.

## AGRADECIMENTOS

Ao Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento CNPq pela concessão de uma bolsa de Iniciação Científica.

## REFERÊNCIAS

1. Gomes, L.F.A.M.; Araya, M.C.G.; Carignano, C. *Tomada de decisão em cenários complexos: introdução aos métodos discretos do apoio multicritério à decisão*, Pioneira Thompson Learning, **2004**.
2. Saaty, Thomas L.; Vargas, Luis G.; *Models, Methods, Concepts & Application of the Analytic Hierarchic Process*; Kluwer Academic Publishers, **2001**.
3. Saaty, Thomas L.; *Decision Making with Dependence and Feedback - The Analytic Network Process*; RWS Publications, **2001**.